Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 4 - Critères d'existence d'intégrales

Rappel théorique. Souvenez-vous des méthodes à manipuler des intégrales : transformation de variables, intégration par parties, décomposition en fractions partielles,...

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **absolument intégrable** sur I lorsque
- quel que soit le segment $[a, b] \subseteq I$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$;
- il existe $M > 0$ tel que pour tout segment $[a, b] \subseteq I$

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \leq M.$$

Propriété 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur I. Quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_n$ de I, la suite*

$$\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx \right)_n$$

converge et la limite est indépentante de la suite exhaustive choisie.

*On appelle cette limite l'intégrale de f sur I et on dit aussi que l'intégrale $\int_I f(x) \, dx$ **existe**.*

Propriété 2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur tout segment de I. Si $g : I \to \mathbb{R}^+$ est absolument intégrable et*

$$|f| \leq g$$

sur I, alors f est absolument intégrable sur I.

Définition 2. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur tout segment de I. On dit que l'intégrale de f sur I **converge** lorsque
- quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_n$ de segments de I, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx \right)_n$ converge dans $\mathbb{R}$;
- la limite de la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx \right)_n$ ne dépend pas de la suite exhaustive choisie.

Exemple.
- la fonction $f(x) = 1/x^\alpha$ est absolument intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$,
- l'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}$ converge mais n'existe pas.

Exercice 1. *Utiliser les critères des fonctions tests pour étudier l'existence des intégrales suivantes ;*

(a) $\displaystyle\int_0^\infty (1+2x^2)^{-1/2}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^\infty P(x)e^{-x^2}\,dx$ *où* $P(x)$ *est un polynôme ;*

(c) $\displaystyle\int_2^\infty x^\alpha e^{-x}\ln^\beta x\,dx$ *(en fonction de* α *et* β*) ;*

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$;

(f) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x}{(1+x^3)^{1/p}}\,dx$ *(en fonction de* p*) ;*

(g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$.

Exercice 2. *Soit*

$$I=\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\beta}\,dx.$$

Montrer que

(a) I *existe si* $\beta>1$ *;*

(b) I *ne converge pas si* $\beta\le 0$.
AIDE : *utiliser le critère de Cauchy pour montrer que la suite* $I_n=\int_1^{n\pi} x^{-\beta}\sin x\,dx$ *ne converge pas.*

(c) I *converge mais n'existe pas pour* $0<\beta\le 1$.

Exercice 3. *Étudier l'existence de*

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

où $P(x)$ *et* $Q(x)$ *sont des polynômes sans zéros communs,* $Q(a)=0$ *et* $Q(x)\neq 0$ *pour* $x\in]a,b]$.